

Egy kis emlékeztető

X val.változó	értékek	F(x) eloszlásfv.	„valségek”	$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
diszkrét	x_1, x_2, \dots	lépcsős fv.	p_1, p_2, \dots	$\sum p_i: a \leq x_i < b$
absz.folyt.	$x \in \mathbb{R}$	deriválható fv.	$f(x) = F'(x)$	$\int_a^b f(x) dx$

Eloszlásfüggvény: $F(x) = P(X < x)$. monoton növe, balról folytonos, határértéke mínusz végtelenben 0, plusz végtelenben 1.
 Diszkrét valószínűségeloszlás: $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$. Abszolút folytonos eloszlás: $f(x) \geq 0, \int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$.

Egy eloszlás tartója: diszkrét esetben $[\inf x_i, \sup x_i]$ zárt intervallum
 folytonos esetben a legszűkebb olyan $[a, b]$ intervallum, melyre $\int_a^b f(x) dx = 1$:
 $a = \sup \{x: F(x) = 0\} = \inf \{x: F(x) > 0\}$, $b = \sup \{x: F(x) < 1\} = \inf \{x: F(x) = 1\}$.

Lineáris transzformált eloszlásfüggvénye: $Y = aX + b$ ($a > 0$).

$G(y) = P(Y < y) = P(X < (y-b)/a) = F((y-b)/a)$.

Maximum és minimum eloszlásfüggvénye: X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos eloszlású val.változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

$X_1^* = \min X_i$ eloszlásfüggvénye: $F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$. $X_n^* = \max X_i$ eloszlásfüggvénye: $F_n(x) = F^n(x)$.

Várható érték: $E(X)$ vagy EX .

Diszkrét esetben $E(X) = \sum x_i p_i$ Folytonos esetben $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$

A várható érték vétele lineáris operátor: $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$ (persze több összeadandóra is).

Szórásnégyzet: $D^2(X) = E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$, szórás: $D(X) \geq 0$.

Ha az összeadandók páronként korrelálatlanok (spec: függetlenek), akkor

$D^2(\sum c_i X_i) = \sum c_i^2 D^2(X_i)$. Ellenkező esetben ehhez még hozzá kell adni a kereszt-kovarianciák kétszeresét.

$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$; $D(aX + b) = |a| D(X)$.

Spec, ha X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos eloszlású val.változók, m várható értékkel és s szórással, akkor

$E(\sum X_i) = nm$, $D^2(\sum X_i) = ns^2$, $D(\sum X_i) = \sqrt{ns}$

$E(\sum X_i/n) = m$, $D^2(\sum X_i/n) = s^2/n$, $D(\sum X_i/n) = s/\sqrt{n}$

Nevezetes eloszlások

Név	Jelölés	Értékek	Képlet	E(X)	D ² (X)	Modell	Konvolúció
Indikátor	Ind(p) = Bin(1,p)	0,1	$P(X=1) = p$	p	p(1-p)	Egy p vszgű esemény bekövetkezik-e.	n db. Ind(p) konvolúciója Bin(n,p)
Binomiális	Bin(n,p)	0,1,...,n	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	np(1-p)	n független kísérletből hányszor következik be egy p vszgű esemény	Azonos paraméterű binomiálisok konvolúciója binomiális, a rendek összeadódnak.
Geometriai	Geo(p) = Negbin(1,p)	1,2,...	$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$	1/p	(1-p)/p ²	Hányadik kísérletre következik be először egy p vszgű esemény.	n db. Geo(p) konvolúciója Negbin(n,p)
Negatív binomiális	Negbin(r,p)	r,r+1,...	$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$	r/p	r(1-p)/p ²	Hányadik kísérletre következik be r-ed-szer egy p vszgű esemény.	Azonos paraméterű neg.bin-ek konvolúciója neg.bin., a rendek összeadódnak.
Poisson	Poisson(λ)	0,1,...	$P(X=k) = e^{-λ} λ^k / k!$	λ	λ	Bin(n,p) határesetete, ha $n \rightarrow \infty$, $np \rightarrow λ$.	A konvolúció is Poisson, a paraméterek összeadódnak.
Exponenciális	Exp(λ) = Gamma(1, λ)	(0,∞)	$f(x) = λ e^{-λx}$	1/λ	1/λ ²	Örökifjú folyt. eloszlás.	n db.azonos paraméterű exp. konvolúciója Gamma(n, λ).
Gamma	Gamma(α, λ)	(0,∞)	$f(x) = λ^α x^{α-1} e^{-λx} / \Gamma(α)$	α/λ	α/λ ²	Exponenciálisok összege.	Azonos paraméterű gammák konvolúciója gamma, a rendek összeadódnak
Normális	N(m,σ)	(-∞,∞)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ ²	Sok kis hatás eredője, pl. biológiában gyakori, szimmetrikus, gyorsan lecsengő.	Normálisok konvolúciója normális, a v.é. és a szórás paraméter az ismert módon változik.
Egyenletes	E(a,b)	(a,b)	$f(x) = 1/(b-a)$	(a+b)/2	(b-a) ² /12	Egy szakasz vszge a hosszával arányos.	Egyenletesek konvolúciója bonyolult.

Elméleti összefoglaló 2.

Becslés: általában n elemű mintánk van egy eloszlásból, melynek „alakja” ismert, de néhány paramétere ismeretlen (paraméteres eloszláscsalád). A mintából szeretnénk az ismeretlen paraméterekre következtetni, azaz egy $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ függvényt kiszámítani, mely valamilyen értelemben „közel van” az ismeretlen paraméterhez.

A T függvény neve: **becslés**; ez maga is valószínűségi változó, melynek persze minden konkrét megfigyelés-sorozatra konkrét értéke van.

Def: A T becslés torzítatlan az a paraméter $f(a)$ függvényére, ha $E_a(T(X_1, X_2, \dots, X_n)) = E_a(T) = f(a)$ az a paraméter minden lehetséges értékére.

Ha a becslés nem torzítatlan, akkor torzított. A $T_n = T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ becsléssorozat aszimptotikusan torzítatlan, ha $E_a(T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)) = E_a(T_n) \rightarrow f(a)$ az a paraméter minden lehetséges értékére.

Pl: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim E(0, a)$ eloszlásból vett minta, a az ismeretlen paraméter.

$T = T(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_n^*$, $S = S(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}$, $V = V(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1$

T aszimptotikusan torzítatlan a -ra, S és V torzítatlan $a/2$ -re. Mindegyikük torzított a -ra.

Def: Legyen T és S két torzítatlan becslés $f(a)$ -ra. T hatásosabb S -nél, ha $D_a(T) \leq D_a(S)$ az a paraméter minden lehetséges értékére. T hatásos, ha minden más S torzítatlan becslésnél hatásosabb.

Mj.: Két becslés közül nem feltétlenül van hatásosabb, és nem feltétlenül létezik hatásos becslés sem.

Def: T_n konzisztens becsléssorozat $f(a)$ -ra, ha $T_n \rightarrow f(a)$ sztochasztikusan, az a paraméter minden lehetséges értékére. Ez biztosan teljesül, ha T_n aszimptotikusan torzítatlan, és $D_a(T_n) \rightarrow 0$ (Csebisev-egyenlőtlenség).

Pl: T konzisztens a -ra, S konzisztens $a/2$ -re, de V nem az.

Def: A $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ függvény egy másik neve: statisztika. T elégséges statisztika az a paraméterre, ha a $P_a(\underline{X}=\underline{x}/T=t)$ valószínűség már nem függ a -tól, minden olyan t értékre, melyre $P_a(T=t) > 0$ (minden a -ra). Itt \underline{X} az X_1, X_2, \dots, X_n vektort jelöli.

Mj.: a T statisztika is lehet vektor-értékű.

Neyman faktorizációs tétele szerint T akkor és csak akkor elégséges statisztika, ha a minta együttes sűrűségfüggvénye/valószínűsége szorzattá bontható: az egyik tényező függhet a teljes mintától, de nem függ a paramétertől, míg a másik tényező függhet a paramétertől, de a mintától csak a T statisztikán keresztül függ: $f_a(\underline{x}) = \prod f_a(x_i) = h(\underline{x})g_a(T(\underline{x}))$.

Pl: a fenti három statisztika közül csak T elégséges a -ra: $f_a(\underline{x}) = \prod f_a(x_i) = \prod (1/a) * I(x_i \leq a) = (1/a^n) * I(x_n^* \leq a) = g_a(T(\underline{x}))$. (Ebben az esetben $h(\underline{x})$ konstans.)

Elméleti összefoglaló 3.

Blackwellizálás (Rao-Blackwell-Kolmogorov tétel): módszer jó torzítatlan becslés konstruálására úgy, hogy egy egyszerű torzítatlan becslést egy elégséges statisztika segítségével megjavítunk. Általában n elemű mintánk van.

Lépések:

1. A becsléni kívánt paraméterre egyszerű torzítatlan becslést adunk, gyakran csak az első (néhány) mintaelem felhasználásával. Jelölje ezt T . Ez az egyszerű becslés sokszor indikátor változó, mert felismerjük, hogy a becsléni kívánt paraméter valaminek a valószínűsége. Pl. Ind(p) eloszlásnál $p = P_p(X_1=1)$, $p^2 = P_p(X_1=1, X_2=1)$, $p(1-p) = P_p(X_1=1, X_2=0)$. A megfelelő torzítatlan becslések: $T_1 = I(X_1=1)$, $T_2 = I(X_1=1, X_2=1)$, $T_3 = I(X_1=1, X_2=0)$.
2. Keresünk egy S (minél egyszerűbb) elégséges statisztikát.
3. Felírjuk a $V = E(T/S)$ becslést. Ez a feltételes várható érték nem függ az ismeretlen paramétertől, mivel S elégséges. Másrészt ez is torzítatlan becslés, és hatásosabb az eredeti T -nél (hogy mennyivel, az más kérdés...). V maga is valószínűségi változó, az S -nek függvénye: ha S a k értéket veszi fel, akkor V értéke $E(T/S=k)$.

Becslés momentum módszerrel (MM):

Ezt az általános becslési eljárást főleg akkor használjuk, ha a minta eloszlásának sok ismeretlen paramétere van. Ha ennek az eloszlásnak végesek a momentumai, akkor a nagy számok törvénye ill. a centrális határeloszlás-tétel alapján a minta k -dik tapasztalati momentuma jó becslése az ismeretlen eloszlás k -dik momentumának:

$$M_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \approx M_\lambda(k) = E_\lambda(X^k)$$

Mármint itt a baloldalon álló mennyiséget ismerjük (a mintából kiszámolható), míg a jobboldalon álló mennyiség az ismeretlen λ paraméter(vektor) függvénye. A módszer abból áll, hogy $k=1$ -től kezdve annyi egyenlőséget írunk fel, ahányból az ismeretlen paraméterek egyértelműen kifejezhetők, így kapjuk meg a becslésüket. Általában annyi egyenletre van szükség, ahány ismeretlen paraméter van, de pl. a szimmetrikus

$E(-a, a)$ eloszláscsalád esetében $M_\lambda(1)=0$, így az első egyenlet nem használható az a paraméter kifejezésére.

Becslés maximum likelihood módszerrel (ML):

Ismét n elemű független mintával dolgozunk. Az ismeretlen a paraméterek ML becslése az a vektor, amely maximalizálja a $L(a; \underline{x}) = f_a(\underline{x}) = \prod f_a(x_i)$ úgynevezett likelihood függvényt. Az $L(a; \underline{x})$ jelölés azt mutatja, hogy itt az \underline{x} -et ismertnek tekintjük, és a függvényt mint a függvényét nézzük. A ML becslés nem feltétlenül létezik, és nem feltétlenül egyértelmű. Ha létezik, akkor az elégséges statisztika függvénye. „Szép” esetekben viszont „jó” tulajdonságai vannak (aszimptotikus torzítatlanság, normalitás, optimalitás).

Ha a függvény deriválható, akkor a maximumot kereshetjük a $\partial_a \log L(a) = 0$ egyenlet megoldásaként (persze a megoldásokról ellenőrizni kell, hogy maximumhelyek-e). Tipikusan nem ilyen eset, amikor az eloszlás tartója függ az ismeretlen paraméter(ek)től, pl. egyenletes eloszlásnál. Ilyenkor a ML becslésben általában a legnagyobb/legkisebb mintaelem jelenik meg.

Fisher információ

Legyen X_1, \dots, X_n n elemű független minta egy közös eloszlásból, melynek egyetlen a ismeretlen paramétere van. Ekkor az az információ, melyet a minta a -ra vonatkozóan tartalmaz: $I_n(a) = E_a[(\partial_a \log L(X, a))^2]$.

Ha $E_a[\partial_a \log L(X, a)] = 0$, akkor $I_n(a) = D_a^2[\partial_a \log L(X, a)] = n D_a^2[\partial_a \log L(X_1, a)] = n I_1(a)$. Ilyenkor tehát elég az egy elemű minta esetével foglalkozni. A Fisher információ arra használható, hogy segítségével alsó korlátot adhatunk a torzítatlan becslések szórásnégyzetére (Cramér-Rao egyenlőtlenség), azaz ha egy torzítatlan becslés szórásnégyzete eléri az információs határt (megegyezik az alsó korláttal), akkor biztosan hatásos.

Konfidencia-intervallum

Legyen X_1, \dots, X_n minta. A $(T_1, T_2) = (T_1(X_1, \dots, X_n), T_2(X_1, \dots, X_n))$ statisztikapár legalább $(1-\alpha)$ megbízhatósági szintű konfidencia-intervallum az ismeretlen a paraméterre, ha $P_a(T_1 \leq a \leq T_2) \geq 1-\alpha$ minden a -ra. Pontosan $(1-\alpha)$ a megbízhatóság, ha az előző egyenlőtlenségek mind teljesülnek, α helyett kisebb számot írva azonban már nem. A (T_1, T_2) intervallum tehát nagy valószínűséggel tartalmazza az ismeretlen paraméter valódi értékét (a gyakorlatban leggyakrabban $\alpha=0,1$, $\alpha=0,05$ vagy $\alpha=0,01$). Az azonos megbízhatóságú intervallumok közül célszerű a legrövidebbet választani. A konfidencia-intervallumot gyakran úgy konstruáljuk, hogy egy pontbecslés köré (gyakran szimmetrikus) intervallumot veszünk fel. Pl.: $X_1, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$. Ha σ ismert, akkor az m várható értékre vonatkozó konfidencia-intervallum:

$$(T_1, T_2) = \bar{X} \pm \frac{z_{1-\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}, \text{ ha viszont } \sigma \text{ ismeretlen, akkor } (T_1, T_2) = \bar{X} \pm \frac{t_{n-1, 1-\alpha/2} s_n^*}{\sqrt{n}}.$$

Itt s_n^* a korrigált tapasztalati szórás, a z ill. t_{n-1} értékek pedig a standard normális ill. az $n-1$ szabadsági fokú t -eloszlás megfelelő kvantiliseit jelölik, ezeket táblázatból lehet kikeresni.

Elméleti összefoglaló 4.

Hipotézisvizsgálati alapfogalmak: Egy ismeretlen eloszlásból vett minta alapján szeretnénk dönteni arról, hogy elfogadható-e az alaphipotézisünk, vagy a megfigyelések alapján el kell vetnünk azt.

Amennyiben az eloszlásnak csak néhány paraméterét nem ismerjük, paraméteres hipotézisvizsgálati feladatról beszélünk. Ilyenkor a lehetséges paraméterek halmazát paraméterternek hívjuk, jelölése: Θ .

A hipotézisek: H_0 : $\vartheta \in \Theta_0$ a nullhipotézis

H_1 : $\vartheta \in \Theta_1$ az ellenhipotézis,

ahol $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ a paraméterter diszjunkt felbontása.

A minta lehetséges értékeinek halmaza a mintater, jelölése: X .

A döntési eljárás, másnéven statisztikai próba a következő. A mintateret felbontjuk két diszjunkt részre: $X = X_0 \cup X_1$.

Ha az X mintára $X \in X_0$, akkor elfogadjuk a nullhipotézist, ha viszont

$X \in X_1$, akkor elvetjük.

Ezért az X_0 elnevezése elfogadási tartomány, X_1 pedig az elutasítási vagy kritikus tartomány.

Természetesen lehet, hogy tévesen döntünk. Ha elutasítjuk a nullhipotézist, pedig igaz, akkor elsőfajú hibát követünk el, ha viszont elfogadjuk, pedig nem igaz, akkor másodfajú hibáról beszélünk.

Az elsőfajú hiba valószínűsége adott $\vartheta \in \Theta_0$ paraméterérték mellett: $P_{\vartheta}(X \in X_1)$.

A másodfajú hiba valószínűsége adott $\vartheta \in \Theta_1$ paraméterérték mellett: $P_{\vartheta}(X \in X_0)$.

A próba terjedelme az elsőfajú hibavalószínűségek szuprémuma: $\alpha = \sup\{P_{\vartheta}(X \in X_1): \vartheta \in \Theta_0\}$.

A próba erőfüggvénye minden Θ_1 -beli paraméterértékre a helyes döntés valószínűségét adja meg: $b(\vartheta) = P_{\vartheta}(X \in X_1)$, $\vartheta \in \Theta_1$. Általában adott terjedelem mellett a legerősebb (maximális erőfüggvényű) próbát keressük.

A döntés értelmezése:

Ha elfogadjuk H_0 -t, az azt jelenti, hogy nem volt okunk elutasítani, vagy azért, mert tényleg igaz, vagy azért, mert nem volt elég adat.

Ha viszont H_1 -et fogadjuk el, az azt jelenti, hogy bizonyítékot találtunk arra, hogy igaz. Ha tehát valamit be akarunk bizonyítani, tegyük az ellenhipotézisbe!

A normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák:

A várható értékre (μ):

	Ismert szórás(ok): U-próba	Ismeretlen szórás(ok): t-próba
Egy mintás: X_1, \dots, X_n normális minta	$H_0: \mu = \mu_0$ $U = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \stackrel{H_0}{\sim} N(0,1)$	$H_0: \mu = \mu_0$ $T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_n^*} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n-1}$
Két mintás: X_1, \dots, X_{n1} és Y_1, \dots, Y_{n2} egymástól független normális minták	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \stackrel{H_0}{\sim} N(0,1)$	$H_0: \mu_1 = \mu_2$ miután F-próbával ellenőriztük, hogy a szórások egyenlőnek tekinthetők-e, $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^{*2} + (n_2 - 1)s_2^{*2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n_1 + n_2 - 2}$

Az elutasítási tartomány alakja (α terjedelem mellett):

Egyoldali ellenhipotézis		Kétoldali ellenhipotézis
$H_1: \mu > \mu_0$ vagy $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \mu < \mu_0$ vagy $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$H_1: \mu \neq \mu_0$ vagy $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
$X_1 = \{S > c_\alpha\}$	$X_1 = \{S < -c_\alpha\}$	$X_1 = \{ S > c_{\alpha/2}\}$

Itt S az U vagy a T statisztikát jelöli, c_α pedig a kritikus érték, amely vagy a standard normális, vagy a t eloszlás táblázatából kereshető ki. Az a lényeg, hogy a kritikus tartományba a próbastatisztika azon értékei kerüljenek, amelyek tipikusan az ellenhipotézis teljesülése esetén fordulnak elő.

A szórásra (σ):

Egy mintás: X_1, \dots, X_n normális minta	Két mintás: X_1, \dots, X_{n_1} és Y_1, \dots, Y_{n_2} egymástól független normális minták
$H_0: \sigma = \sigma_0$	$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$
$F = \frac{s_1^{*2} H_0}{\sigma_0^2} \sim F_{n-1, \infty}$ vagy $S = (n-1) \frac{s_1^{*2} H_0}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$	$F = \frac{s_1^{*2} H_0}{s_2^{*2}} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$

Az elutasítási tartomány alakja (csak kétoldali ellenhipotézisre, azaz $H_1: \sigma \neq \sigma_0$ vagy

$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$): $\mathcal{X}_1 = \{\max(F, 1/F) > c_{\alpha/2}\}$, ahol a kritikus érték az F eloszlás táblázatából kereshető ki, a megfelelő szabadsági fokokkal.

Ezen próbákat tehát a következő lépésekben alkalmazzuk:

1. Az adatokról feltehető-e, hogy normális eloszlásúak.
2. Egy minta, vagy két független minta van? Ha két összefüggő mintánk van, akkor vesszük a különbségüket, és arra alkalmazunk egymintás próbát.
3. U vagy t-próba kell-e? Ha kétmintás t-próbát szeretnénk végezni, ellenőrizzük a szórások egyenlőségét!
4. Mik a hipotézisek? Egyoldali vagy kétoldali az ellenhipotézis?
5. Mi lesz a kritikus tartomány alakja, mennyi a terjedelemnek (és a szabadsági foknak) megfelelő kritikus érték?
6. Számoljuk ki a próbastatisztika értékét, döntsük el, hogy a kritikus tartományba esik-e.
7. Vonjuk le a következtetést (szavakkal is).

Elméleti összefoglaló 5.

Valószínűséghányados (likelihood hányados) próba: Abban az esetben, ha két egyszerű hipotézisünk van, a Neyman-Pearson lemma alapján az adott terjedelmű próbák között a valószínűséghányados próba a legerősebb. Részletesebben: legyen $H_0: \vartheta = \vartheta_0$, $H_1: \vartheta = \vartheta_1$, és $0 \leq \alpha \leq 1$ adott terjedelem. Ekkor létezik c és p , hogy a következő döntési függvénnyel megadott próba terjedelme éppen α , és a legfeljebb α terjedelmű próbák között ez a legerősebb (azaz ennek a legnagyobb az ereje, ennek a legkisebb a másodfajú hibavalószínűsége).

Jelölje a mintát X , és számoljuk ki belőle a $T = T(X) = L_1(X)/L_0(X)$ statisztikát. Ez a statisztika a likelihood hányados, azaz a minta H_1 -szerinti és H_0 -szerinti likelihoodjának (valószínűségének vagy sűrűségfüggvényének) hányadosa. Ezek után

ha $T > c$, akkor H_1 mellett döntünk,

ha $T < c$, akkor H_0 mellett döntünk,

ha $T = c$, akkor véletlenülünk: p val.-gel H_1 , $1-p$ val.-gel pedig H_0 mellett döntünk.

A véletlenítésre csak diszkrét eloszlású minta esetén lehet szükség, hogy a pontos terjedelmet be tudjuk állítani. A c és p értékeket úgy kell megválasztani, hogy a következő egyenlőség teljesüljön:

$P_0(T > c) + pP_0(T = c) = \alpha$. A próba ereje $b = P_1(T > c) + pP_1(T = c)$, másodfajú hibavalószínűsége pedig $\beta = 1 - b = P_1(T < c) + (1-p)P_1(T = c)$.

Álljon itt egy példa: egy érméről két dobás alapján szeretnénk eldönteni, hogy szabályos-e (H_0), vagy a fejdobás valószínűsége $1/4$ (H_1). Adjuk meg a $0,3$ terjedelmű valószínűséghányados próbát!

X értékei:	FF	FI	IF	II
$L_0(X)$	1/4	1/4	1/4	1/4
$L_1(X)$	1/16	3/16	3/16	9/16
$L_1(X)/L_0(X)$	1/4	3/4	3/4	9/4

A T statisztika legnagyobb értéke $9/4$. Ha csak ebben az esetben utasítanánk el H_0 -t, akkor a terjedelem $0,25$ lenne, ami még túl kevés. A T statisztika második legnagyobb értéke $3/4$. Ha még ebben az esetben is elutasítanánk H_0 -t, akkor a terjedelem $0,75$ lenne, ami már túl sok. Tehát véletlenülíteni kell: $c = 3/4$, és p -re az egyenlet: $0,3 = 0,25 + p0,5$, azaz $p = 0,1$.

A próba tehát a következő: Két fej esetén H_0 mellett döntünk, két írás esetén H_1 -et fogadjuk el, ha pedig a két dobás különböző, akkor $0,1$ val.-gel H_1 , $0,9$ val.-gel H_0 a választásunk.

Mj.1: Vegyük észre, hogy az FI és az IF eseteket összevonhatjuk, hiszen ezek valószínűsége mind H_0 , mind H_1 esetén egyforma.

Mj.2: Vegyük észre, hogy akármilyen $q < 1/2$ számra $H_1: P(\text{fej}) = q$ ellenhipotézisre ugyanezt a próbát kaptuk volna. Ez azt jelenti, hogy próbánk a $H_0: P(\text{fej}) = 1/2$, $H_1: P(\text{fej}) < 1/2$ hipotézispárra egyenletesen legerősebb.

Mj.3: Végül azt is vegyük észre, hogy a c értéke nem fontos: a végeredményt c nélkül is el lehet mondani. Már a megoldás közben észrevehettük volna, hogy a $\{T > c\}$ állítás ekvivalens azzal, hogy $\{\text{fejek száma} < d\}$ valamilyen más d konstansra, azaz döntésünk csak a fejek számától függ.

Khi-négyzet próba illeszkedésvizsgálatra: Legyen A_1, A_2, \dots, A_r teljes eseményrendszer, és tekintsük a következő hipotéziseket: $H_0: P(A_i) = p_i, 1 \leq i \leq r$, $H_1: P(A_i) \neq p_i$ valamely i -re.

n független kísérletből legyen n_i az A_i esemény gyakorisága, ekkor $n_1 + \dots + n_r = n$.

Áll.: A $T = \sum (n_i - np_i)^2 / np_i$ statisztika közelítőleg $(r-1)$ szabadsági fokú khi-négyzet (χ^2) eloszlású. A közelítés akkor tekinthető jónak, ha $np_i > 5$ minden i -re. Ennek alapján úgy végezhetünk közelítőleg α terjedelmű próbát, hogy H_0 -t akkor utasítjuk el, ha $T > c$, ahol c az $(r-1)$ szabadsági fokú khi-négyzet eloszlás $1-\alpha$ kvantilise (ez táblázatból kereshető ki).

Tiszta illeszkedésvizsgálat: Itt az a null-hipotézis, hogy a minta egy konkrét eloszlásból származik. Ha az eloszlás diszkrét, akkor véges sok lehetséges érték esetén (pl. binomiális eloszlás) $A_i = \{X = x_i\} i=1, \dots, r$, ha pedig végtelen sok érték van (pl. Poisson eloszlás), akkor össze kell vonni: $A_i = \{X = x_i\} i=1, \dots, r-1$,

$A_r = \{X \text{ értéke más}\}$. Ha az eloszlás folytonos F eloszlásfüggvénnyel, akkor a számegyenest r db. intervallumra kell osztani, mondjuk a $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_{r-1} < x_r = \infty$ osztópontokkal. Ekkor

$A_i = \{x_{i-1} < X < x_i\}$ és $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$. Az intervallumokat úgy válasszuk meg, hogy számuk ne legyen se túl kevés (mert akkor sok információt veszítünk), se túl sok (mert akkor nem jó a khi-négyzet közelítés), és nagyjából egyforma legyen minden intervallum p_i valószínűsége.

Becsléses illeszkedésvizsgálat: Annyiban más, hogy a null-hipotézisben nem egy konkrét eloszlás szerepel, hanem csak egy eloszlás-család, pl. hogy a minta geometriai eloszlású (valamilyen paraméterrel). Ekkor a paraméter(ek) értékét a mintából becsüljük meg ML módszerrel. Ezek után a próba ugyanaz, mint a tiszta illeszkedésvizsgálatnál, kivéve, hogy a khi-négyzet eloszlás szabadsági foka a becsült paraméterek számával csökken. Azaz ha a mintából s db. paramétert becsültünk, akkor a szab. fok = $r - s - 1$.